Драга Редакция,

Изпращам ви решение на задача 1 от брой 3/2003 г. на списание “Математика и Информатика”.

Митко Христов Кунчев, директор на МГ “Баба Тонка”, гр. Русе
Адрес: 7000 Русе, ул. “Иван Вазов” 18
Тел.: 83 43 23, e-mail: direktor@mg-babatonka.bg

Задача 1. Дължините на основите, бедрата и диагоналите на трапец са естествени числа. Възможно ли е тези шест естествени числа да дават един и същ остатък 1, 2 или 3 при деление на 4?

Решение: Първо ще докажем, че за трапец **ABCD** с основи **AB** = **a**, **CD** = **b**, бедра **BC** = **c**, **AD** = **d** и диагонали **AC** = **e**, **BD** = **f** важи формулата $\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 + 2.\mathbf{a}.\mathbf{b}$. Нека $\angle\mathbf{BAD} = \alpha$ и $\angle\mathbf{ABC} = \beta$. Прилагаме косинусова теорема за триъгълниците:

$$\Delta\,\mathbf{ABC}:\ \mathbf{e}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 - 2.\mathbf{a}.\mathbf{c}.\cos\beta, \qquad (1)$$
$$\Delta\,\mathbf{BCD}:\ \mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2.\mathbf{b}.\mathbf{c}.\cos\beta, \qquad (2)$$
$$\Delta\,\mathbf{ACD}:\ \mathbf{e}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 + 2.\mathbf{b}.\mathbf{d}.\cos\alpha, \qquad (3)$$
$$\Delta\,\mathbf{ABD}:\ \mathbf{f}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{d}^2 - 2.\mathbf{a}.\mathbf{d}.\cos\alpha. \qquad (4)$$

Умножаваме двете страни на (1) с **b**, на (2) с **a** и ги събираме почленно. Получаваме:

$$\mathbf{b}.\mathbf{e}^2 + \mathbf{a}.\mathbf{f}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{c}^2 + \mathbf{a}.\mathbf{b}). \qquad (5)$$

Умножаваме двете страни на (3) с **a**, на (4) с **b** и ги събираме почленно. Получаваме:

$$\mathbf{a}.\mathbf{e}^2 + \mathbf{b}.\mathbf{f}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{d}^2 + \mathbf{a}.\mathbf{b}). \qquad (6)$$

Събираме (5) и (6) почленно и след съкращаване на (**a** + **b**) получаваме, че

$$\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 + 2.\mathbf{a}.\mathbf{b}. \qquad (7)$$

Като използваме (7) ще докажем, че не е възможно дължините на основите, бедрата и диагоналите на трапец (**a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**) да са естествени числа, които дават един и същ остатък 1, 2 или 3 при деление на 4. Ще разглеждаме по отделно тези три случая.

Случай 1. Нека **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** дават остатък 1 при деление на 4. Тогава остатъкът на лявата страна на (7) е 2, а на дясната е 0 при деление на 4. Това не е възможно.

Случай 2. Нека **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** дават остатък 3 при деление на 4. Можем да смятаме че всички остатъци са –1. Тогава остатъкът на лявата страна е 2, а на дясната е 0 при деление на 4. Това не е възможно.

Случай 3. Нека **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** дават остатък 2 при деление на 4, т.е. шестте числа са четни, но не се делят на 4. Тогава съществуват нечетни числа $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_1$ такива, че $\mathbf{a} = 2.\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b} = 2.\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c} = 2.\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d} = 2.\mathbf{d}_1$, $\mathbf{e} = 2.\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f} = 2.\mathbf{f}_1$. Следователно:

$$(7) \Leftrightarrow 4.\mathbf{e}_1^2 + 4.\mathbf{f}_1^2 = 4.\mathbf{c}_1^2 + 4.\mathbf{d}_1^2 + 8.\mathbf{a}_1.\mathbf{b}_1 \Leftrightarrow \mathbf{e}_1^2 + \mathbf{f}_1^2 = \mathbf{c}_1^2 + \mathbf{d}_1^2 + 2.\mathbf{a}_1.\mathbf{b}_1 \qquad (8)$$

Нечетните числа дават остатък ±1 при деление на 4, следователно за (8) имаме отново случай 1 или случай 2. Доказахме, че не е възможно дължините на основите, бедрата и диагоналите на трапец да са естествени числа, които дават един и същ остатък 1, 2 или 3 при деление на 4.

Коментар: Равенството (7) е повод за различни задачи свързани с делимост на естествени числа, които са дължини на отсечки в трапец. Облекчен вариант на разглежданата задача беше публикуван в списание CRUX MATHEMATICORUM with MATHEMATICAL MAYHEM брой 8/2001 г. – задача 2691. Тя е:

Даден е равнобедрен трапец. Дължините на диагонала, бедрото и едната основа са нечетни числа. Ако дължината на другата основа е цяло число, докажете че то се дели на 8.

В този случай (7) добива вида:

$$\mathbf{AC}^2 = \mathbf{BC}^2 + \mathbf{AB}.\mathbf{CD} \ \Leftrightarrow \mathbf{AB}.\mathbf{CD} = (\mathbf{AC} - \mathbf{BC}).(\mathbf{AC} + \mathbf{BC}),$$

което прави твърдението в задачата почти очевидно.